elde ederiz.

(h). $a.b = 0$ olsun. Eğer, $b \neq 0$ (veya $a \neq 0$) ise $a.b = 0$ denkleminin a ya (b ye) göre çözümü tek olduğundan $a = 0.b^{-1} = 0$ ($b = 0.a^{-1} = 0$) elde ederiz.

(m). İkinci önermenin doğruluğunu görelim. Sıralama aksiyomlarının ikinci özelliğine göre

$$(a \leq b) \wedge (b < c) \Leftrightarrow (a \leq b) \wedge (b \leq c) \wedge (b \neq c) \Rightarrow a \leq c$$

olur. Şimdi $a \neq c$ olduğunu gösterelim. $a = c$ olsun. Bu durumda,

$$(a \leq b) \wedge (b < c) \Leftrightarrow (c \leq b) \wedge (b < c) \wedge (c \leq b) \wedge (b \leq c) \wedge (b \neq c)$$

olur. Buradan sıralama aksiyomlarının birinci özelliğine göre $(b = c) \wedge (b \neq c)$ çelişkisi elde edilir.

(p). $1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, yani $1 \neq 0$ olsun. Eğer, $1 < 0$ ise (o) özelliğine göre

$$(1 < 0) \wedge (1 < 0) \Rightarrow (0 < 1.1) \Rightarrow (0 < 1)$$

elde edilir.

(q). $a \neq 0$ olduğu açıktır. $a^{-1} < 0$ olduğunda

$$(a^{-1} < 0) \wedge (0 < a) \Rightarrow (a.a^{-1} < 0) \Rightarrow (1 < 0)$$

çelişkisi elde edilir. Şimdi ikinci önermenin doğruluğunu görelim.

$$\begin{aligned}(0 < a) \wedge (a < b) &\Rightarrow (0 < b) \wedge (a < b)\\ &\Rightarrow (0 < a^{-1}) \wedge (0 < b^{-1}) \wedge (a < b) \Rightarrow (0 < a^{-1}.b^{-1}) \wedge (a < b)\\ &\Rightarrow (a.(a^{-1}.b^{-1}) < b(a^{-1}.b^{-1})) \Rightarrow a.(a^{-1}).b^{-1} < (b.b^{-1}).a^{-1}\\ &\Rightarrow 1.b^{-1} < 1.a^{-1} \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}\end{aligned}$$

elde edilir. ◇

(2) Aşağıdaki $X \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için, eğer varsa, $\sup X$ ve $\inf X$ sayılarını bulunuz.

(a) $X = \{ \dfrac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$; ($b$) $X = \{ \dfrac{1}{3} \pm \dfrac{n}{3n+1} : n \in \mathbb{N} \}$;

(c) $X = \{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \}$; ($d$) $X = \{ 0,5, 0,55, \ldots, \underbrace{0,55\ldots5; \ldots}_{n-\text{kez}} \}$.

Çözüm: Bu ve buna benzer problemlerin çözümünde esasen supremum ve infimum karakteristik özellikleri kullanılır.
(a) $\max X = \sup X = 2$ olduğu açıktır. Her $n \in \mathbb{N}$ sayısı için $\dfrac{n+1}{n} > 1$ dir. Herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > 1/\epsilon$ doğal sayısı için $\dfrac{n+1}{n} < 1 + \epsilon$ eşitsizliği sağlandığından $\inf X = 1$ elde edilir.
(b) $\inf X = 0$ dır. Çünkü, herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > \frac{1-3\epsilon}{9\epsilon}$ doğal sayısı için $0 < \frac{1}{3} - \frac{n}{3n+1} < \epsilon$ eşitsizliği sağlandığından $\inf X = 0$ elde edilir.

$\sup X = \frac{2}{3}$ dir. Çünkü, herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > \frac{1-3\epsilon}{9\epsilon}$ doğal sayısı için $\frac{2}{3} - \epsilon < \frac{1}{3} + \frac{n}{3n+1} < \frac{2}{3}$ eşitsizliği sağlandığından $\sup X = \frac{2}{3}$ elde edilir.
(c) $\max X = \sup X = 2$ olduğu açıktır. Şimdi $\inf X = 0$ olduğunu gösterelim. Her $n, m \in \mathbb{R}$ sayıları için $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} > 0$ ve herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > \dfrac{2}{\epsilon}$ ve $m > \dfrac{2}{\epsilon}$ doğal sayıları için $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$ eşitsizliği sağlandığından $\inf X = 0$ elde edilir.
(d) $\min X = \inf X = 0,5$ olduğu açıktır. $\sup X = \dfrac{5}{9}$ olduğunu gösterelim. Bunu gösterirken, ileride göstereceğimiz monoton reel sayı dizisinin şu özelliğinden kullanacağımız: Artan ve üstten sınırlı (x_n) reel sayı dizisinin sonlu limiti vardır ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\ \}$$

dir. Terimleri $x_1 = 0,5, x_2 = 0,55, \ldots, x_n = 0,\underbrace{55\ldots5}_{n\in\mathbb{N}}, \ldots$ biçiminde tanımlanan (x_n) artan ve üstten sınırlı bir dizidir. Diğer taraftan,

$$x_n = 0,5 + 0,05 + 0,005 + \ldots + 0,\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ kez}}5$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{200} + \ldots + \frac{1}{2\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ kez}}}$$

$$= \frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\big)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1 - 1/10^n}{1 - 1/10} = \frac{5}{9}\big(1 - \frac{1}{10^n}\big)$$

olduğundan, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{5}{9}$ olur ve dolayısıyla,
$\sup X = \sup\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\ \} = \dfrac{5}{9}$ olur. $\diamond$

(3) $X \subset Y \subset \mathbb{R}$ ise $\sup X \leq \sup Y$ ve $\inf X \geq \inf Y$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $B_1 = \sup X$ ve $B_2 = \sup Y$ olarak alalım. Eğer, Y kümesi üstten sınırlı değilse, $B_2 = +\infty$ dir. Dolayısıyla, $B_1 \leq +\infty = B_2$ olduğu açıktır. Y üstten sınırlı olsun. Bu durumda, üst sınır prensibine göre B_2 sonlu sayıdır. $X \subset Y$ olduğundan her $x \in X$ için $x \leq B_2$ olur. Dolayısıyla, B_2 sayısı X in bir üst sınırıdır. Buradan da $B_1 \leq B_2$ elde edilir. İkinci eşitsizlik benzer şekilde gösterilir. $\diamond$

(4) $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ ve $\emptyset \neq Y \subset \mathbb{R}$ olsun. Eğer, her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $x \leq y$ ise X in üstten, Y nin ise alttan sınırlı olduğunu ve $\sup X \leq \inf Y$ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: Sabit $y_0 \in Y$ ve her $x \in X$ için $x \leq y_0$ olduğundan X üstten sınırlı bir kümedir ve $\sup X \leq y_0$ olur. Her $y \in Y$ için $\sup X \leq y$ olduğundan Y alttan sınırlı bir kümedir. Buradan da $\sup X \leq \inf Y$ elde edilir. $\diamond$

(5) Problem (4) teki X ve Y kümeleri için $X \cup Y = \mathbb{R}$ ise $\sup X = \inf Y$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\sup X \leq \inf Y$ olduğunu Problem (4) te gösterdik. Şimdi $\sup X = \inf Y$ olduğunu gösterelim. IV Tamlık aksiyomuna göre her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $x \leq c \leq y$ olacak biçimde tek bir $c \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Eğer, $\sup X < \inf Y$ ise $c \notin X$ ve $c \notin Y$ elde edilir. Bu ise $X \cup Y = \mathbb{R}$ olması ile çelişdiğinden $\sup X = \inf Y$ olur. $\diamond$

(6) $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ ve $\emptyset \neq Y \subset \mathbb{R}$ sınırlı kümeleri için $X \cap Y$ ve $X \cup Y$ kümelerinin sınırlı olduğunu ve

(a) $\sup(X \cup Y) = \max(\sup X, \sup Y)$;

(b) $\inf(X \cup Y) = \min(\inf X, \inf Y)$;

(c) $\max(\inf X, \inf Y) \leq \inf(X \cap Y)$;

(d) $\sup(X \cap Y) \leq \min(\sup X, \sup Y)$;

önermelerinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm: (a) ve (c) önermelerinin doğruluğunu gösterelim. (b) ve (d) nin çözümleri okuyucuya bırakılmıştır.

(a) X ve Y sınırlı iki küme olduğundan $B_1 = \sup X$ ve $B_2 = \sup Y$ sayıları sonludur (IV Tamlık aksiyomuna göre). $B_1 \leq B_2$ olsun. Her $x \in X$ için $x \leq B_1 \leq B_2$ ve her $y \in Y$ için $y \leq B_2$ olduğundan her $z \in X \cup Y$ için $z \leq B_2$ olur. Buradan da $X \cup Y$ kümesinin üstten sınırlı olduğu ve

$$\sup(X \cup Y) \leq B_2$$

elde edilir. Diğer taraftan, $Y \subset (X \cup Y)$ olduğundan Problem (3) e göre $\sup Y \leq \sup(X \cup Y)$, yani $B_2 \leq \sup(X \cup Y)$ olur. $B_2 = \max(B_1, B_2)$ olduğundan son iki eşitsizliğe göre (a) önermesinin doğruluğu gösterilmiş olur.

(c) X ve Y sınırlı iki küme olduğundan $A_1 = \inf X$ ve $A_2 = \inf Y$ sayıları sonludur (Teorem 1.7.5 'e göre). $A_1 \leq A_2$ olsun. Her $y \in Y$ için $A_2 \leq y$ olduğundan her $z \in X \cap Y$ için $A_2 \leq z$ olur. Buradan da $X \cap Y$ kümesinin alttan sınırlı olduğu ve

$$A_2 \leq \inf(X \cap Y)$$

elde edilir. Diğer taraftan, $(X \cap Y) \subset Y$ olduğundan Problem (3) e göre $\inf Y \leq \inf(X \cap Y)$, yani $A_2 \leq \inf(X \cap Y)$ olur. $A_2 = \max(A_1, A_2)$

olduğundan son iki eşitsizliğe göre (c) önermesinin doğruluğu gösterilmiş olur. $\diamond$

(7) $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}$ ve

$$\lambda X = \{x \in \mathbb{R} :\ \exists u \in X, x = \lambda u\} = \{\lambda x :\ x \in X\}$$

olsun. X üstten sınırlı ve $\lambda > 0$ ise

$$\sup(\lambda X) = \lambda . \sup X$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $B = \sup X$ olsun. $x \in (\lambda X) \Rightarrow x = \lambda u,\ u \in X,\ u \leq B \Rightarrow x = \lambda u \leq \lambda B \Rightarrow \lambda . B$ sayısı X in bir üst sınırıdır. B', λX kümesinin herhangi bir üst sınırı olsun. Bu durumda, $\forall x \in (\lambda X)$ için $x \leq B' \Rightarrow \forall u \in X$ için $\lambda u \leq B' \Rightarrow \forall u \in X$ için $u \leq B'/\lambda$ olur. Buradan, B'/λ sayısının X in bir üst sınırı olduğu ve dolayısıyla, $B \leq B'/\lambda$ veya $\lambda B \leq B'$ olduğu anlaşılır. Bundan dolayı λB, λX kümesinin üst sınırının en küçüğüdür, yani $\lambda B = \sup(\lambda X)$ dir. $\diamond$

(8) $X \subset \mathbb{R},\ Y \subset \mathbb{R}$ ve

$$X + Y = \{z : \exists x \in X,\ \exists y \in Y,\ z = x + y\} = \{x + y :\ x \in X,\ y \in Y\},$$
$$X.Y = \{z : \exists x \in X,\ \exists y \in Y,\ z = x.y\} = \{x.y :\ x \in X,\ y \in Y\}$$

olsun.

(a) X ve Y üstten sınırlı olduğunda $X + Y$ nin de üstten sınırlı olduğunu ve

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$$

olduğunu gösteriniz.

(b) $X \subset \mathbb{R}_+$ ve $Y \subset \mathbb{R}_+$ üstten sınırlı olduğunda $X.Y$ nin de üstten sınırlı olduğunu ve

$$\sup(X.Y) = \sup X . \sup Y$$

olduğunu gösteriniz. Herhangi $X \subset \mathbb{R}$ ve $Y \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için bu özelliğin doğru olmadğını gösteren örnek veriniz.

Çözüm: (a) $\sup X = B_1$ ve $\sup Y = B_2$ olsun. Her $x \in X$ için $x \leq B_1$ ve her $y \in Y$ için $y \leq B_2$ olduğundan her $x + y \in (X + Y)$ için $x + y \leq B_1 + B_2$ olur. Buradan, $X + Y$ nin üstten sınırı olduğu görülür. Üst sınırın ikinci karakteristik özelliğine göre herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde

$$\begin{array}{lll} \exists\, x_\epsilon \in X & \text{öyleki} & x_\epsilon > B_1 - \epsilon/2 \\ \exists\, y_\epsilon \in Y & \text{öyleki} & y_\epsilon > B_2 - \epsilon/2 \end{array}$$

olur. Buradan $x_\epsilon + y_\epsilon \in (X + Y)$ ve $x_\epsilon + y_\epsilon > B_1 + B_2 - \epsilon$ elde edilir. O zaman supremum özelliklerinden $\sup(X + Y) = B_1 + B_2$ olur.
(b) $\sup X = B_1$ ve $\sup Y = B_2$ olmak üzere $\forall x \in X$ için $0 < x \leq B_1$ ve $\forall y \in Y$ için $0 < y < B_2$ olduğundan her $x.y \in (X.Y)$ için $0 < x.y \leq B_1 B_2$ olur. Buradan da $X.Y$ nin üstten sınırlı olduğu görülür.

$B_1 = 0$ veya $B_2 = 0$ ise $\sup(X.Y) = 0 = B_1.B_2$ olduğu açıktır. $B_1 > 0$ ve $B_2 > 0$ olsun. Herhangi $0 < \epsilon < 2\min(B_1^2, B_2^2)$ sayısı verilsin. Üst sınırın ikinci özelliğine göre

$$\begin{array}{lll} \exists\, x_\epsilon \in X & \text{öyleki} & x_\epsilon > B_1 - \dfrac{\epsilon}{2B_2} \\ \exists\, y_\epsilon \in Y & \text{öyleki} & y_\epsilon > B_2 - \dfrac{\epsilon}{2B_1} \end{array}$$

olur. Buradan $x_\epsilon.y_\epsilon \in (X.Y)$ ve

$$x_\epsilon.y_\epsilon > B_1.B_2 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{4B_1B_2} > B_1.B_2 - \epsilon$$

elde edilir. Bu durumda, $\sup(X.Y) = B_1.B_2$ olur.
(b) önermesi herhangi $X \subset \mathbb{R}$ ve $Y \subset \mathbb{R}$ kümeleri için doğru olmayabilir. Örneğin, $X = (-3, -2)$ ve $Y = (-5, -\frac{1}{2})$ kümeleri için $X.Y = (1, 15)$ ve $\sup X = -2$, $\sup Y = -1/2$, $\sup(X.Y) = 15 \neq 1 = \sup X. \sup Y$ olduğu elde edilir. $\diamond$

(9) Mutlak değerin (c) özelliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Mutlak değerin (b) özelliğine göre

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a-b| \tag{1.1}$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} |b| = |(b-a)+a| \leq |b-a| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |b-a| = |a-b| \\ \Rightarrow -|a-b| \leq |a| - |b| \end{aligned} \tag{1.2}$$

(1.1) ve (1.2) den $||a|-|b|| \leq |a-b|$ olduğu anlaşılır. $\diamond$

(10) $|x+1| + |x| + |x-1| - 6 = 0$ denkleminin köklerini (sıfır yerlerini) bulunuz.

Çözüm:

$$|x+1| + |x| + |x-1| - 6 = \begin{cases} -3x - 6 = 0, & x \in (-\infty, -1) \text{ ise,} \\ -x - 4 = 0, & x \in [-1, 0) \text{ ise,} \\ x - 4 = 0, & x \in [0, 1) \text{ ise,} \\ 3x - 6 = 0, & x \in [1, \infty) \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu açıktır. Buradan görüldüğü gibi denklemin $[-1, 0)$ ve $[0, 1)$ üzerinde kökleri yoktur, $(-\infty, -1)$ üzerinde $x = -2$ ve $[1, +\infty)$ üzerinde $x = 2$ denklemin birer kökleridir. $\diamond$

1.9 Ek Problemler

(11) $\mathbb{R}$ nin 1.7 deki (d), (f), (l) ve (m) özelliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

(12) Aşağıdaki $X \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için, eğer varsa $\sup X$ ve $\inf X$ sayılarını bulunuz.

(a) $X = \left\{ \dfrac{m}{n} : \ m, n \in \mathbb{N} \ \text{ ve } \ m < n \right\};$

(b) $X = \left\{ \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{n}{2n-1} : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$;

(c) $X = \left\{ x_n : \ x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} \quad n \in \mathbb{N} \right\}$;

(d) $X = \left\{ x_n : \ x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1} \quad n \in \mathbb{N} \right\}$;

(e) $X = \left\{ x_n : \ x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} \quad n \in \mathbb{N} \right\}$;

(f) $X = \left\{ \dfrac{6^{n+1} - 5^{n+1}}{6^n + 5^n} : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$;

(g) $X = \left\{ \dfrac{\ln n}{n} : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$.

Cevap:

(a) $\inf X = 0, \ \sup X = 1$; (b) $\inf X = 0, \ \sup X = 1$;

(c) $\inf X = \dfrac{1}{2}, \ \sup X = 1$; (d) $\inf X = \dfrac{1}{3}, \ \sup X = \dfrac{1}{2}$;

(e) $\inf X = \dfrac{1}{2}, \ \sup X = 1$; (f) $\inf X = 1, \ \sup X = 6$;

(g) $\inf X = 0, \ \sup X = \dfrac{\ln 3}{3}$.

(13) Aşağıdaki $X \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için, eğer varsa $\sup X$ ve $\inf X$ sayılarını bulunuz.

(a) $X = \left\{ [1 + (-1)^n n].n + \dfrac{1-(-1)^n}{n} : \ n \in \mathbb{N} \right\}$;

(b) $X = \left\{ \dfrac{n^3}{2n^2+1} : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$;

(c) $X = \left\{ \dfrac{n^3+1}{n^4+1} : \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$;

(d) $X = \left\{ [(-1)^n + 1]n^2 + \dfrac{(-1)^n - 1}{2} \quad n \in \mathbb{N} \right\}$;

Cevap:

(a) $\inf X = 0,\ \sup X = +\infty$; (b) $\inf X = \frac{1}{3},\ \sup X = \frac{1}{2}$;
(c) $\inf X = \frac{-1}{2},\ \sup X = \frac{1}{2}$; (d) $\inf X = \frac{-1}{2},\ \sup X = +\infty$.

(14) (a) $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi alttan sınırlı ise $-X$ in üstten sınırlı olduğunu ve $\sup(-X) = -\inf X$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

(b) $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi üstten sınırlı ise $-X$ in alttan sınırlı olduğunu ve $\inf(-X) = -\sup X$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

(15) (a) $X \subset \mathbb{R}$ ve $Y \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri alttan sınırlı olduğunda $X+Y$ nin de alttan sınırlı olduğunu ve $\inf(X+Y) = \inf X + \inf Y$ olduğunu gösteriniz.

(b) $X \subset \mathbb{R}_+$ ve $Y \subset \mathbb{R}_+$ alt kümeleri alttan sınırlı olduğunda $X.Y$ nin de alttan sınırlı olduğunu ve $\inf(X.Y) = \inf X . \inf Y$ olduğunu gösteriniz. Herhangi $X \subset \mathbb{R}$ ve $Y \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için bu özelliğin genel olarak doğru olmadığını gösteren örnek veriniz.

(16) Mutlak değerin (a) ve (b) özelliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

(17) Aşağıdaki denklemlerin köklerini bulunuz:

(a) $|x| + |x-1| + |x+2| - 2,5 = 0$; (b) $|2x+3| = x^2$;
(c) $x|x+2| - |x+1| - (x+1)|x| + 1 = 0$; (d) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{x-1}{x+1}$;
(e) $|x^2 - 5x + 6| = -(x^2 - 5x + 6)$.

Cevap: (a) $0,5$ ve $1,5$; (b) -1 ve 3; (c) $(0, +\infty)$;
(d) $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$;(e) $[2, 3]$.